UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

26

17 G 26 A01
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5 Coef 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (4 points).

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse.
Chaque réponse trouvée rapporte 0,5 point et la justification 0,5 point ; soit au total **1point** pour la réponse trouvée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x}$ est égale à :
a. 0.
b. 0,5.
c. 1.

2. $\int_1^e \ln x \, dx$ est égale à :
a. 1.
b. $e-1$.
c. e.

3. La solution générale de l'équation différentielle $y'' + 6y' + 9y = 0$ est donnée par :
a. $y(x) = Axe^{-3x}$.
b. $y(x) = Ae^{-3x} + Be^{3x}$.
c. $y(x) = (Ax + B)e^{-3x}$.

4. f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$. Alors $f'(x)$ est égale à :
a. $(\ln x)^2$.
b. $x \ln x$.
c. $(\ln x)^2 + 2\ln x$.

Exercice 2 (6 points).

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère le polynôme $P(z)$ défini par : $P(z) = z^4 + (3-i)z^3 + (4-3i)z^2 + (12-4i)z - 12i$ et l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

1. a. Montrer que $P(z)$ est divisible par $(z-i)(z+3)$. **0,5 pt**
b. Factoriser $P(z)$. **0,5 pt**
c. En déduire les solutions de l'équation : $P(z) = 0$ sous la forme trigonométrique. **1 pt**

2. a. Déterminer les nombres complexes α et β solutions de l'équation (E) avec $Im\alpha > 0$. **0,5 pt**
b. Ecrire α et β sous la forme trigonométrique. **0,5 pt**

3. On considère un dé bien équilibré à six faces et sur chaque face, on inscrit l'un des nombres : i ; $2i$; $-2i$; $\sqrt{3}+i$; $\sqrt{3}-i$ et -3.

On lance ce dé et on note z le nombre qui apparait sur sa face supérieure.

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements A et B suivants : **1 pt**
A : « z est réel » ; B : « z est imaginaire pur ».

b. On lance 5 fois de suite ce même dé. Calculer la probabilité d'obtenir 4 fois la réalisation de l'évènement B. **0,5 pt**

4. On définit la variable aléatoire θ qui, à chaque nombre z inscrit sur une face, associe son argument principal.

a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par θ. **0,5 pt**

b. Déterminer la loi de probabilité de θ. **0,5 pt**

c. Calculer son espérance mathématique $E(\theta)$. **0,5 pt**

PROBLEME (10 points).

Partie A

On considère la fonction numérique d'une variable réelle f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 + \ln(2e^{-x} - 1) & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{-1}{x(1 - \ln x)} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique $2cm$.

1. a. Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}\backslash\{e\}$, puis calculer les limites aux bornes de D_f. **1,5 pt**

b. Montrer que pour tout $x \leq 0$, $f(x) = x + 2 + \ln(2 - e^x)$. **0,25 pt**

c. Etudier le signe de $x(1 - \ln x)$. **0,25 pt**

d. Etudier la continuité de f en 0. **0,5 pt**

e. On admet que $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\ln(2 - e^x)}{x} = -1$. Calculer la limite $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et interpréter géométriquement le résultat. **1 pt**

f. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 2 + \ln 2$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$, puis étudier la position relative de (C_f) et de la droite (Δ). **0,5 pt**

2. a. Etudier les variations de f. **1,5 pt**

b. Dresser son tableau de variations. **0,5 pt**

c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution γ située dans l'intervalle $]-3; -2[$. En déduire une valeur approchée de γ à 10^{-1} près. **0,5 pt**

3. Tracer les droites asymptotes à (C_f), puis la courbe (C_f) . **1,25 pt**

Partie B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]e\ ; +\infty[$.

1. Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. **0,25 pt**

2. On note g^{-1} la bijection réciproque de g.

a. Dresser le tableau de variations de g^{-1}. **0,25 pt**

b. Comment obtient-on la courbe $(C_{g^{-1}})$ à partir de la courbe (C_g) ? (On ne demande pas la construction de $C_{g^{-1}}$). **0,25 pt**

Partie C

Soit F la fonction définie par : $F(x) = \ln|1 - \ln x|$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_F de F. **0,5 pt**

2. Déterminer la fonction dérivée F' de F. **0,5 pt**

3. En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 3$ et $x = 5$. **0,5 pt**